18/4/16

Ισομετρίες

Ορισμός: Έστω $(E_1, < >)$ και $(E_2, < >)$ δύο Ευκλείδιοι χώροι και $f: E_1 \to E_2$ γραμμική απεικόνιση. Η f ονομάζεται ισομετρία αν για κάθε $\vec{a} \in E_1$ ισχύει $\|\vec{a}\| = \|f(\vec{a})\|$

Παράδειγμα

Έστω $f,g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο με $f(x,y) = (x-2y, x+y, x+3y)$ και

$$g(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, 0, \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$$

$$|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|f(x,y)| = \sqrt{(x-2y)^2 + (x+y)^2 + (x+3y)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2+4y-4xy+x^2+y^2+2xy+x^2+6xy+9y^2}$$

$$= \sqrt{3x^3+14y^2+4xy}$$

$$|g(x,y)| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{2\sqrt{3}}{4}xy + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}xy}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}$$

Πρόταση: Η γραμμική απεικόνιση $f: E_1 \to E_2$ είναι ισομετρία αν και μόνο αν για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in E_1$ ισχύει
$\langle f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta}) \rangle_2 = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle_1$

Απόδειξη

$(\Leftarrow)$ $\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle} = \sqrt{\langle f(\vec{\alpha}), f(\vec{\alpha}) \rangle} = \|f(\vec{\alpha})\|$

Άρα f ισομετρία.

$(\Rightarrow)$ $\|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|^2 = \langle \vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle + \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle$
$= \boxed{\|\vec{\alpha}\|^2} + 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle + \|\vec{\beta}\|^2$

$\|f(\alpha)+f(b)\|^2 = \boxed{\|f(\vec{\alpha})\|^2} + 2\langle f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta}) \rangle + \|f(\vec{\beta})\|^2$

f ισομετρία $\|f(\vec{\alpha})\| = \|\vec{\alpha}\|$
$\|f(\vec{\beta})\| = \|\vec{\beta}\|$
$\|f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\| = \|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|$
$\|f(\vec{\alpha})+f(\vec{\beta})\| = \|f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\| = \|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|$

Άρα $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta}) \rangle$

Πρόταση: Αν $f: E_1 \to E_2$ είναι ισομετρία τότε
(i) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow f(\vec{\alpha}) \perp f(\vec{\beta})$
(ii) $\sphericalangle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \sphericalangle(f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta}))$
η γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ — γωνία των $f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta})$

Απόδειξη

i) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta}) \rangle = 0 \Leftrightarrow$
$f(\vec{\alpha}) \perp f(\vec{\beta})$

ii) $\theta = \sphericalangle(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ $\qquad \varphi = \sphericalangle(f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta}))$
$0 \le \theta \le \pi$

$\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{\|\vec{\alpha}\| \|\vec{\beta}\|}$ $\qquad \sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\langle f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta}) \rangle}{\|f(\vec{\alpha})\| \|f(\vec{\beta})\|}$

Ισχυριζόμαστε ότι αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0} \neq \vec{\beta}$ τότε και $f(\vec{\alpha}) \neq \vec{0} \neq f(\vec{\beta})$

(Έστω ότι $f(\vec{\alpha}) = \vec{0} \Rightarrow \|f(\vec{\alpha})\| = 0 \overset{f \text{ ισομ}}{=} \|\vec{\alpha}\| = 0$
$\Rightarrow \vec{\alpha} = 0$ άτοπο!

f ισομετρία $\|\vec{\alpha}\| = \|f(\vec{\alpha})\|$ και $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta}) \rangle$
$\|\vec{\beta}\| = \|f(\vec{\beta})\|$

Άρα $\left.\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu\theta \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array}\right\} \varphi = \theta$

Πρόταση: Αν $f: E_1 \to E_2$ ισομετρία, τότε για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in E$ ισχύει $d(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = d(f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta}))$

Ορισμός. $d(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

Απόδειξη...

$d(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \overset{\text{ορ.}}{=} |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \overset{f \text{ ισομ.}}{=} \|f(\vec{\alpha} - \vec{\beta})\| \overset{f \text{ γραμ.}}{=} \|f(\vec{\alpha}) - f(\vec{\beta})\| \overset{\text{ορισμ.}}{=} d(f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta}))$

Παρατήρηση: Έστω $f: E_1 \to E_2$ ισομετρία και η f 1-1.

Απόδειξη

Έστω $\vec{\alpha} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\vec{\alpha}) = \vec{0} \Rightarrow \|f(\vec{\alpha})\| = 0$
$\xrightarrow{f \text{ ισομ.}} \|\vec{\alpha}\| = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow f$ 1-1

Παρατήρηση: Έστω $f: E_1 \to E_2$ ισομετρία.
Αν $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο του E_1 τότε $\{f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \ldots, f(\vec{e_n})\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο **του** E_2

Απόδειξη

$\{\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}\}$ ορθοκανονικό σύνολο $\overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow}$

$<\bar{e_i}, \bar{e_j}> = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

f ισομ. $\iff < f(\bar{e_i}), f(\bar{e_j}) > = \delta_{ij} \overset{\text{ορισμός}}{\iff} \{ f(\bar{e_i}) \ldots f(\bar{e_n}) \}$ ορθοκανονικό σύνολο

Παρατήρηση: Έστω $f: E_1 \to E_2$ ισομετρία. Αν $\{\bar{e_1}, \ldots \bar{e_n}\}$ ορθοκανονική βάση του E_1 τότε $\{f(\bar{e_1}) \ldots f(\bar{e_n})\}$ ορθοκανονικό σύνολο του E_2 $\dim E_2 \geq \dim E_1$

Παρατήρηση: Έστω $f: E_1 \to E_2$ ισομετρία και $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ τότε αν $\{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots \bar{e_n}\}$ ορθοκανονική βάση του E_1 τότε $\{f(\bar{e_1}), \ldots f(\bar{e_n})\}$ ορθοκανονική βάση του E_2

Θεώρημα: Έστω $f: E_1 \to E_2$ γραμμική απεικόνιση. Αν $\{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots \bar{e_n}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του E_1 και $\{f(\bar{e_1}), f(\bar{e_2}), \ldots f(\bar{e_n})\}$ ορθοκανονική βάση E_2 τότε f ισομετρία.

$\bar{e_1} \to \bar{a_1}$

$\bar{e_n} \to \bar{a_n}$

βάση

$\bar{e} = \lambda_1 \bar{e_1} + \quad + \lambda_n \bar{e_n}$

$f(\bar{e}) = \lambda_1 \bar{a_1} + \quad + \lambda_n \bar{a_n}$

Έστω $\vec{a} \in E_1 \Rightarrow \vec{a} = \lambda_1 \vec{e_1} + \ldots + \lambda_n \vec{e_n}$ - ορθοκανονική βάση

$||\vec{a}|| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2}$

$f(\vec{a}) = f(\lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \ldots + \lambda_n \vec{e_n})$

$= \lambda_1 \ldots + \lambda_2 f(\vec{e_2}) + \ldots + \lambda_n f(\vec{e_n})$

$\{f(\vec{e_1}), \ldots, f(\vec{e_n})\}$ ΟΚΒ (ορθοκανονική βάση) $\Rightarrow$

$||f(\vec{a})|| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2} = ||\vec{a}|| \Rightarrow f$ ισομετρία

$||\vec{a}|| = ||f(\vec{a})||$

Άσκηση Βρείτε μια ισομετρία από το $\mathbb{R}^3$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}_2[x]$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$

ΟΚΒ του $\mathbb{R}^3$	ΟΚΒ του $\mathbb{R}_2[x]$
$(1,0,0)$	1
$(0,1,0)$	$\sqrt{12}(x-\frac{1}{2})$
$(0,0,1)$	$\sqrt{180}(x^2-x+\frac{1}{6})$

Από προηγούμενο μάθημα

$f(1,0,0) = 1$

$f(0,1,0) = \sqrt{12}(x-\frac{1}{2})$

$f(0,0,1) = \sqrt{180}(x^2-x+\frac{1}{6})$

$f(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha \cdot f(1,0,0) + \beta \cdot f(0,1,0) + \gamma f(0,0,1)$

$= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \sqrt{12}(x-\frac{1}{2}) + \gamma \cdot \sqrt{180}(x^2-x+\frac{1}{6})$

Ισομετρία!!!

Θεώρημα: Έστω $f:(E,\langle\ \rangle)\to(E,\langle\ \rangle)$ ισομετρία και $\dim E=n$ τότε η f ισομορφισμός

γραμμική ✓
1-1 ✓
επί ✓

$$\underset{n}{\dim E}=\underset{0}{\dim \ker f}+\underset{n}{\dim \operatorname{Im} f}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dim \operatorname{Im} f=n=\dim E\\ \operatorname{Im} f\subset E\end{array}\right\}\Rightarrow \operatorname{Im} f=E$$

επί!

Ισομετρία

$[f]_a^a$ $a=\{\vec{e_1},\ \ ,\vec{e_n}\}$ ΟΚΒ

$$[f]_a^a=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{2n}\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}\end{pmatrix}$$